Potenza n-esima di un binomio: Il triangolo di Tartaglia

In questa scheda ci si propone di fornire un criterio che permetta di calcolare la potenza $(a+b)^n$, con $n \in N$.
Osserviamo le potenze ottenute:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Si può notare che:

- lo sviluppo di ciascuna potenza dà origine a un polinomio omogeneo dello stesso grado dell'esponente della potenza, completo e ordinato secondo le potenze decrescenti di *a* e crescenti di *b*;
- il primo coefficiente è sempre uguale a 1;
- i coefficienti di ciascuna riga si ottengono utilizzando una disposizione dei numeri a triangolo, detto ***triangolo di Tartaglia***.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
… … … … … … …

Figura 2. Il triangolo di Tartaglia

In questo triangolo i numeri di ciascuna riga (tranne il primo e l'ultimo che sono uguali a 1) sono la somma dei due soprastanti della riga precedente.

1
1 1
↘+↙
1 2 1
↘+↙ ↘+↙
1 3 3 1
↘+↙ ↘+↙ ↘+↙
1 4 6 4 1
… … … … … …

Figura 3. Costruzione del triangolo di Tartaglia

Con questa semplice regola si hanno gli sviluppi:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a\,b^2 + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a\,b^3 + 6a\,b^{22} + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a\,b^4 + 10a\,b^{3\,2} + 10a\,b^{2\,3} + 5ab^4 + b^5$

Sviluppa la seguente potenza di binomio

1. $(2a - b^2)^4 = (2a)^4 + 4\cdot(2a)^3\cdot(-b^2) + 6\cdot(2a)^2\cdot(-b^2)^2 + 4\cdot(2a)\cdot(-b^2)^3 + (-b^2)^4 =$
   $= 16a^4 - 32a^3b^2 + 24\,a^2b^4 - 8\,ab^6 + b^8$